ÁLGEBRA VECTORIAL

1 – MAGNITUDES VECTORIALES

Existen magnitudes cuyas cantidades se determinan dando un solo dato numérico, como por ejemplo la temperatura de un punto del espacio o la masa de un cuerpo. Se dice que ese tipo de magnitudes son del tipo **escalar**. Pero un solo dato numérico no siempre es suficiente para especificar una sola cantidad, especialmente cuando la magnitud tiene una cualidad de direccionalidad. Así, para determinar el efecto de una fuerza sobre un cuerpo no basta con dar la intensidad de dicha fuerza, sino que es necesario especificar en qué dirección y sentido se aplica, ya que éstos determinarán el resultado final. Es necesario, pues, dar información adicional sobre la entidad fuerza. Para especificar entes asociados a una idea de dirección se utilizan objetos matemáticos llamados **vectores**. La definición más general de vector engloba un conjunto de propiedades generales que pueden ser cumplidas por gran tipo de entidades (desde rayas orientadas en un papel hasta funciones integrables de variable real), por lo que nos centraremos en la idea tradicional de vector como algo representado por un segmento orientado.

En un espacio tridimensional ordinario (euclideo), un vector queda caracterizado por su dirección, sentido y módulo. **Dirección** es la característica de direccionalidad dada por una recta (distintas rectas no paralelas señalan distintas direcciones; dos rectas paralelas indican la misma dirección), **sentido** es cada una da las dos posibilidades de movimiento en una recta, y **módulo** es la longitud del segmento. La velocidad, por ejemplo, viene dada por un vector; si suponemos desplazamientos rectos, la dirección indica el tipo de trayectoria que se efectúa (Madrid-Valencia, Jaén-Motril, etc), el sentido indica hacia dónde se va (de Jaén a Motril, o de Motril a Jaén), y el módulo indica la rapidez con que nos movemos. Eso significa que el velocímetro de un coche es, en realidad, solamente el "modulímetro", puesto que indica el módulo de la velocidad. Es importante diferenciar los conceptos de dirección y módulo que, a menudo, y por abuso de lenguaje, se interpretan como sinónimos: el propio código de la circulación habla de "dirección única", cuando el término preciso es el de "sentido único."

Para que dos vectores sean iguales han de tener igual dirección, sentido y módulo. Esto es estrictamente cierto para los llamados vectores libres. Los vectores deslizantes, por contra, exigen que no solamente la dirección, sino la recta en la que se apoyan, sean la misma. Dos vectores paralelos pero que yazcan en rectas distintas serán iguales si son libres, no si son deslizantes.

En lo que sigue, y mientras no se advierta de lo contrario, se suponen que los vectores que vamos a utilizar serán libres. Las magnitudes vectoriales suelen representarse mediante una letra con una barra vertical en la parte superior ($\bar{\mathbf{C}}$). El módulo de un vector viene simbolizado por el vector encerrado entre barras, o bien por una letra sin negrita: $A = |\bar{\mathbf{A}}|$. A veces, en especial si estamos interesados en su representación gráfica, el vector se describe dando sus puntos extremos: un vector que tiene su origen en M y acaba en N puede venir dado por $\bar{\mathbf{A}}$ = MN. Un vector MM es igual al vector cero, y tiene módulo nulo; se representa por $\bar{\mathbf{0}}$.

Los vectores que tienen módulo igual a la unidad se denominan **vectores unitarios**. Un vector unitario se representa, por lo general, con un acento circunflejo (existen otras posibilidades) $\hat{\mathbf{a}}$. De un vector cualquiera (no nulo) puede obtenerse un vector unitario dividiéndolo por su módulo (véase el apartado de multiplicación escalar-vector): $\hat{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{A}}/|\bar{\mathbf{A}}|$.

2 – SISTEMAS DE COORDENADAS

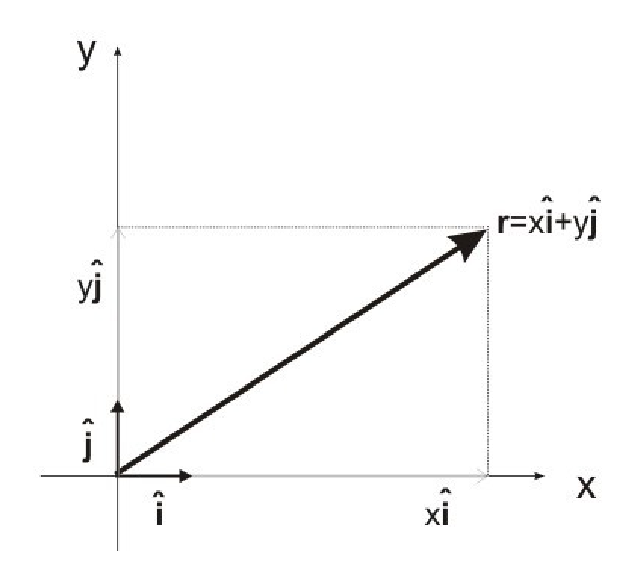
Para describir analíticamente un vector hay que dar un conjunto de tres parámetros, llamados **componentes**. Esos parámetros serán las cantidades numéricas que utilizaremos para efectuar operaciones entre ellos (como sumarlos o multiplicarlos). En su forma más general, un

espacio N-dimensional permite definir una **base de vectores** ($\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2...\overline{\mathbf{v}}_N$) de tal forma que cualquier vector $\overline{\mathbf{A}}$ de ese espacio pueda ponerse como combinación lineal de vectores de esa base: $\overline{\mathbf{A}} = c_1*\overline{\mathbf{v}}_1 + c_1*\overline{\mathbf{v}}_1 \ldots + c_N*\overline{\mathbf{v}}_N$. En este ejemplo, los coeficientes ($c_1,c_2... c_N$) son las componentes del vector $\overline{\mathbf{A}}$ en la base vectorial ($\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2...\overline{\mathbf{v}}_N$).

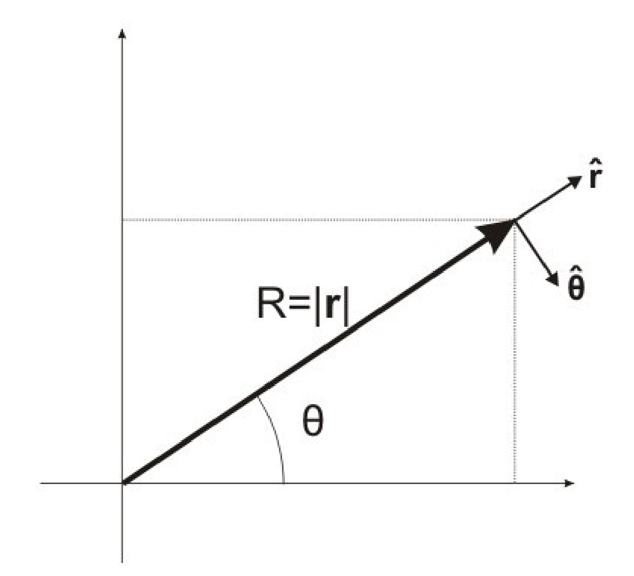
Los vectores de la base pueden cumplir cualquier condición, con tal de que sean independientes entre sí (es decir, que ninguno de ellos se pueda expresar como combinación lineal de los demás). Cuando los vectores se utilizan para representar posiciones, la base que forman se suele conocer con el nombre de **sistema de coordenadas**).

Los sistemas de coordenadas definen la posición de cualquier punto en el espacio N-dimensional mediante el llamado **vector de posición**, que se extiende desde el centro del origen de coordenadas hasta la posición del punto en cuestión. El vector de posición, que suele representarse con la letra $\overline{\mathbf{r}}$, se representa en el sistema de coordenadas como $\overline{\mathbf{r}} = a_1*\overline{\mathbf{v}}_1 + a_1*\overline{\mathbf{v}}_1 \ldots + a_N*\overline{\mathbf{v}}_N$, donde las componentes ($a_1,a_2... a_N$) se conocen con el nombre de **coordenadas** del punto.

En un espacio de dos dimensiones, los dos sistemas de coordenadas más usados son el de coordenadas cartesianas y el de coordenadas polares. El **sistema de coordenadas cartesianas** tiene una base de dos vectores unitarios mutuamente perpendiculares (**î**, **ĵ**) que representan una dirección horizontal y vertical, respectivamente. El vector de posición en este sistema se representa como $\bar{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}$, donde (x,y) son las **coordenadas cartesianas** del vector. Cualquier otro vector podrá asimismo representarse como $\overline{\boldsymbol{A}} = a_x\hat{\boldsymbol{i}} + a_y\hat{\boldsymbol{j}}$, o de forma más sencilla mediante sus componentes (a_x, a_y).



En **el sistema de coordenadas polares**, la base de vectores viene indicada por $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, y el vector de posición vendrá representado como $\bar{\boldsymbol{r}} = R\hat{\boldsymbol{r}} + \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$. La diferencia más importante es que los vectores de la base, aunque también son unitarios y mutuamente perpendiculares, no tienen una dirección fija. El vector $\hat{\boldsymbol{r}}$ es paralelo al vector $\bar{\boldsymbol{r}}$ mientras que el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es perpendicular a $\bar{\boldsymbol{r}}$. Cualquier vector definido en el punto $\bar{\boldsymbol{r}}$ puede escribirse como $\overline{\boldsymbol{A}} = a_r\hat{\boldsymbol{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$, donde las componentes (a_r ,a_θ) representan el módulo del vector y el ángulo que éste forma con alguna dirección conocida (por lo general, el eje horizontal).



Ambos sistemas resultan muy útiles para estudiar la mayoría de las situaciones reales, y las relaciones que ligan las componentes en uno y otro son sencillas. Podemos comprobar, por simple trigonometría, la validez de las relaciones para el cambio de coordenadas polares a rectangulares:

$$x = Rcos(\theta) \quad y = Rsen(\theta)$$

y para el cambio de coordenadas rectangulares a polares:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan(\theta) = y/x$$

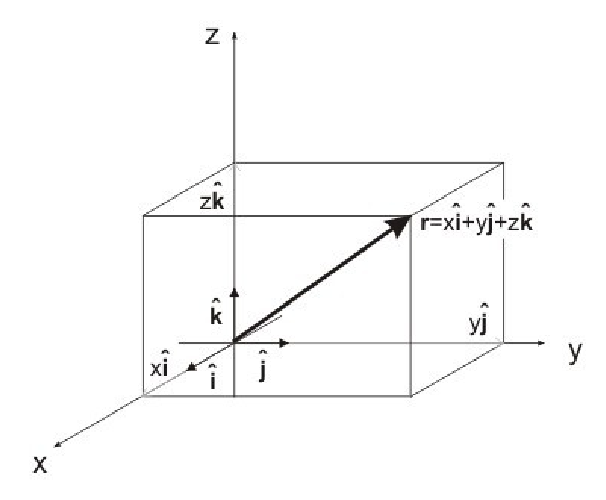
(donde hay que tener en cuenta a qué cuadrante pertenece el ángulo θ). Una característica a tener en cuenta en el sistema de coordenadas polares es que sus vectores unitarios $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ tienen direcciones paralela y perpendicular al vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$; si dicho vector varía, también lo hará la dirección de los vectores. Esto nos da una regla importante: *en un sistema de coordenadas, los vectores unitarios que la caracterizan no tienen por qué ser constantes ni en dirección ni en sentido*. Tampoco necesitan ser mutuamente perpendiculares, aunque por comodidad supondremos esta condición a menos que se indique lo contrario.

La interpretación geométrica de las coordenadas en ambos sistemas es la siguiente. En coordenadas cartesianas (x,y) representan las distancia que hay que recorrer en horizontal y vertical para llegar al extremo del vector, de modo similar a los piratas cuando entierran un tesoro (“20 pasos hacia el Este y 50 pasos hacia el Norte”). Las coordenadas pueden ser positivas o negativas. El punto origen de coordenadas tiene como vector de posición el cero, y sus coordenadas son (0,0).

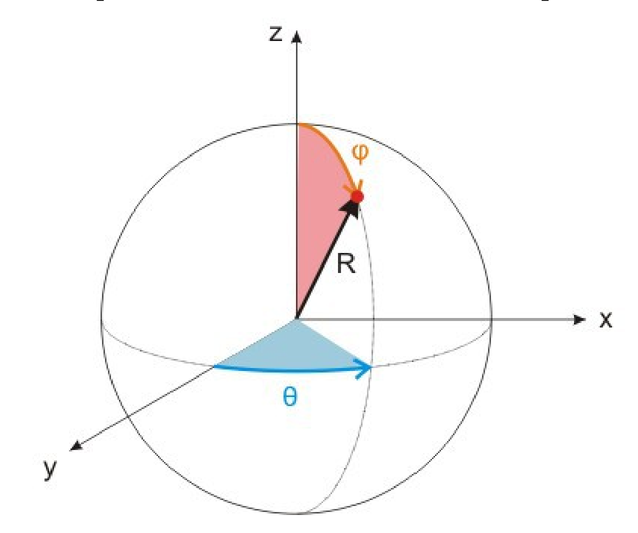
Las coordenadas polares indican la dirección y rumbo. Se trata de un sistema muy empleado en navegación marina y aérea. Cuando el operador de sonar dice algo como "objetivo en marcación 248, distancia 12", está dando una posición en coordenadas polares: "248" indica el ángulo θ en grados (0º indica el norte y 90º el Este en coordenadas navales), y "12" denota la distancia en las unidades adecuadas (millas o kilómetros). En este caso resulta más útil dar la posición como distancia y dirección, ya que en estos casos nuestro cerebro lo interpreta de forma más cómoda que

dando las coordenadas rectangulares. Como desventaja, las operaciones entre vectores son más difíciles de efectuar, y una simple suma de vectores es una tarea ardua comparada con el sistema en coordenadas cartesianas.

En un espacio de tres dimensiones existen diversos sistemas de coordenadas. El **sistema cartesiano** es una extensión sencilla del caso bidimensional: se define un tercer vector unitario $\hat{\boldsymbol{k}}$, perpendicular a (**î**, **ĵ**). De esa forma, un vector de posición vendrá determinado como $\bar{\boldsymbol{r}}=x\hat{\boldsymbol{i}}+y\hat{\boldsymbol{j}}+z\hat{\boldsymbol{k}}$, donde (x, y, z) serán las coordenadas cartesianas. Cualquier otro vector podrá asimismo expresarse como $\bar{\boldsymbol{A}}=A_x\hat{\boldsymbol{i}}+A_y\hat{\boldsymbol{j}}+A_z\hat{\boldsymbol{k}}$, donde ($A_x$,$A_y$, A_z) serán sus coordenadas.



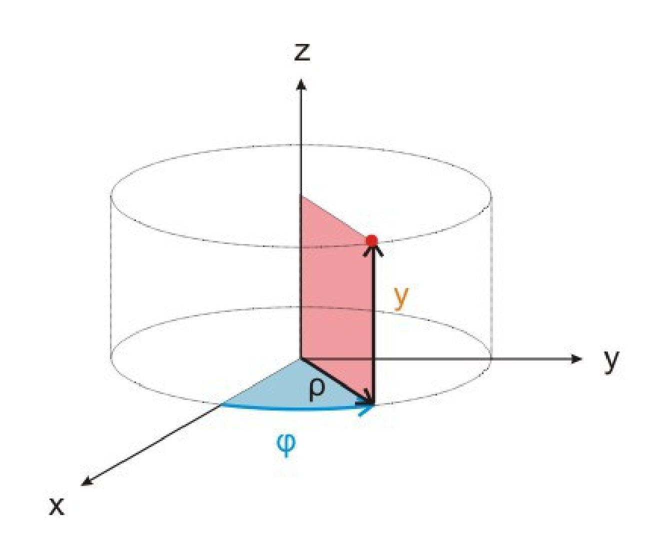
El paso del sistema de coordenadas polares a tres dimensiones no es único, y de hecho hay diversos sistemas que se pueden usar. Indicaremos aquí dos de los más habituales: coordenadas cilíndricas y esféricas. El **sistema de coordenadas esféricas** viene dado por la longitud del vector (r) y dos ángulos, uno de ellos medido en un plano vertical (θ) y otro en un plano horizontal (φ). Estas coordenadas se relacionan con las rectangulares mediante las relaciones:



$$x=Rsen(\theta)sen(\varphi) \quad y=Rsen(\theta)\cos(\varphi) \quad z=Rcos(\theta)$$

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en sistemas donde exista simetría esférica: por ejemplo, si una vector tiene módulo constante, podemos obtener relaciones simplificadoras. El caso más habitual es la determinación de las coordenadas de un lugar sobre la superficie terrestre. Dar longitud y latitud no es otra cosa que señalar la posición de un punto con tres coordenadas esféricas: los ángulos θ (igual a 90º - latitud), φ (longitud), y el módulo R que, en este caso, se sobreentiende conocido y constante, ya que no es sino la distancia de la superficie terrestre al centro de la tierra. La posición de los satélites en el espacio se simplifica grandemente

tomando coordenadas esféricas. También se suele dar la posición de las estrellas en el cielo en término de dos ángulos esféricos: ascensión recta (equivalente a la longitud) y declinación (equivalente a la latitud). En este caso, se supone que los cuerpos celestes se encuentran infinitamente lejos.



En el **sistema de coordenadas cilíndricas**, los tres parámetros que actúan como coordenadas son la altura z (con su vector unitario asociado $\hat{\boldsymbol{k}}$), la distancia ρ, o proyección del vector sobre el plano horizontal (con su vector unitario $\hat{\boldsymbol{\rho}}$), y el ángulo φ formado por ρ y un plano vertical (con su vector $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$). La relación de las componentes cilíndricas (z,ρ,φ) con las rectangulares (x, y, z) son:

$$x=\rho\cos(\varphi) \quad y=\rho\, sen(\varphi) \quad z=z$$

3 – OPERACIONES VECTORIALES ALGEBRAICAS

Existen dos formas fundamentales de efectuar operaciones con vectores: la forma gráfica y la analítica. La formulación analítica resulta particularmente sencilla en el sistema de coordenadas cartesianas, pero muy difícil en coordenadas esféricas o cilíndricas. En lo que sigue, se mostrarán las operaciones analíticas en coordenadas cartesianas. Las coordenadas de un vector $\overline{\mathbf{V}}$ cualquiera se indicarán mediante los subíndices x, y, z: (V_x,V_y, V_z)

3.1 – Suma y diferencia de vectores

Dados dos vectores $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{B}}$, llamamos **suma** o resultante $\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$ al vector que resulta de unir el origen de uno de los vectores sumandos con el extremo del otro sumando, cuando previamente se ha trasladado el extremo del primero con el origen del segundo.

Las componentes del vector suma en coordenadas cartesianas se obtienen de la siguiente forma:

$$C_x = A_x + B_x \quad C_y = A_y + B_y \quad C_z = A_z + B_z$$

La suma de vectores tiene las propiedades:

- Propiedad conmutativa: $\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{A}}$
- Propiedad asociativa: $(\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}) + \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}} + (\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{C}})$
- Elemento neutro $\overline{\mathbf{0}}$: $\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{A}}$
- Vector opuesto **-A**: $\overline{\mathbf{A}} + (-\overline{\mathbf{A}}) = \overline{\mathbf{0}}$
- Diferencia de vectores: $\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + (-\overline{\mathbf{B}})$

El vector opuesto $-\overline{\mathbf{A}}$ tiene igual dirección y módulo que el vector $\overline{\mathbf{A}}$, y sentido opuesto. Estas propiedades nos permiten sumar toda clase de vectores, sin importar el orden de dicha suma. Es importante resaltar que las igualdades son vectoriales, no modulares: la suma $\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$ no implica que $|\overline{\mathbf{C}}| = |\overline{\mathbf{A}}| + |\overline{\mathbf{B}}|$ (eso sólo sucedería en el caso de que $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{B}}$ tengan igual dirección y sentido). Según el teorema del coseno, el módulo de la suma es:

$$|\overline{A} + \overline{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\theta}$$

donde θ es el ángulo que forman las direcciones de ambos vectores entre sí (no confundir ese ángulo θ con el que aparece en coordenadas esféricas).

3.2 – Producto de un vector por un escalar

Dado un vector $\overline{\mathbf{A}}$ con módulo A y un escalar p, el **producto de un vector por un escalar** $p\overline{\mathbf{A}}$ es un vector que tiene igual dirección que el vector original, un módulo igual a $|p|A$ y un sentido igual o contrario al de $\overline{\mathbf{A}}$, según p sea una cantidad positiva o negativa, respectivamente. El cociente de un vector por un escalar no es más que su producto por el inverso de dicho escalar, $\overline{\mathbf{A}}/p = (1/p)\overline{\mathbf{A}}$. En el caso particular p=0, se tiene $\overline{p\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{0}}$, ya que el módulo del vector producto sería nulo (por supuesto, no existiría el cociente $\overline{\mathbf{A}}/0$).

Las coordenadas cartesianas del vector $\overline{\mathbf{B}}=p\overline{\mathbf{A}}$ se obtienen de la siguiente forma:

$$B_x = pA_x \quad B_y = pA_y \quad B_z = pA_z$$

El producto de un vector por un escalar posee las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa: $p\overline{\mathbf{A}}=\overline{\mathbf{A}}p$
- Propiedad asociativa: $(pq)\overline{\mathbf{A}} = p(q\overline{\mathbf{A}})$
- Propiedad distributiva respecto a la suma de escalares: $(p+q)\overline{\mathbf{A}} = p\overline{\mathbf{A}} + q\overline{\mathbf{A}}$
- Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores: $p(\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}) = p\overline{\mathbf{A}} + p\overline{\mathbf{B}}$

3.3 – Producto escalar de dos vectores

Existe más de una forma de definir un producto donde intervengan vectores. Dados dos vectores **A** y **B** que forman entre sí un ángulo θ, se define el **producto escalar** como un número real dado por la siguiente operación:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=ABcos(\theta)$$

Usaremos el símbolo del punto · para el producto escalar, dejando las aspas × para denotar otras operaciones. Como puede verse, este producto arroja un escalar, esto es, un número real. Dicho producto será un número positivo, negativo o nulo según el ángulo formado por los vectores sea mayor, menor o igual a 90º. Si las direcciones de ambos vectores son iguales, el producto escalar vale simplemente $\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}} = A\cdot A = A^2$. Puesto que Bcosθ represente la proyección del vector $\overline{\mathbf{B}}$ sobre la dirección del vector $\overline{\mathbf{A}}$, puede definirse también como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

El producto escalar de dos vectores $\mathbf{A}=(A_x,A_y,A_z)$ y $\mathbf{B}=(B_x,B_y,B_z)$ puede expresarse analíticamente a partir de las relaciones entre los vectores de la base. Dichos vectores son unitarios, mutuamente perpendiculares, y guardan las siguientes relaciones:

$$\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}=\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}=1$$
$$\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}=0$$

Aplicando esas relaciones al producto de dos vectores cualesquiera se obtiene:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=(A_x\hat{\boldsymbol{i}}+A_y\hat{\boldsymbol{j}}+A_z\hat{\boldsymbol{k}})\cdot(B_x\hat{\boldsymbol{i}}+B_y\hat{\boldsymbol{j}}+B_z\hat{\boldsymbol{k}})$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=A_xB_x(\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}})+A_yB_y(\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}})+A_zB_z(\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}})$$
$$+(A_xB_y+A_yB_x)(\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}})+(A_yB_z+A_zB_y)(\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})+(A_xB_z+A_zB_x)(\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})$$

lo que nos da una definición alternativa del producto escalar de dos vectores:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

El producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa: $\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{A}}$
- Propiedad distributiva respecto a la suma vectorial: $\overline{\mathbf{A}}\cdot(\overline{\mathbf{B}}+\overline{\mathbf{C}}) = (\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}})+(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}})$
- Propiedad asociativa respecto al producto por escalar: $p(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}) = (p\overline{\mathbf{A}})\cdot\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}}\cdot(p\overline{\mathbf{B}})$

Dos de las propiedades del producto escalar son de especial interés:

1) De la definición del producto escalar, se sigue: $\cos\theta = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}$ / AB, lo que nos permite determinar el ángulo que forman dos vectores partiendo de sus componentes cartesianas, sin necesidad de establecer relaciones gráficas.

2) Un coseno vale cero cuando su argumento vale 90º. Por tanto, dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar vale cero. Obsérvese que el producto escalar puede ser cero sin que ni uno ni otro vector sean nulos. Esta es una propiedad muy utilizada en Mecánica.

3.4 – Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial tiene una definición algo más compleja. Ello no se debe a simple capricho, sino a un propósito determinado, ya que dicha operación aparecerá a menudo en cálculos de Física. Como su nombre indica, el resultado del producto es un vector, y la operación se denotará mediante el símbolo de aspas (×)

Antes de dar la forma analítica del producto vectorial, comenzaremos indicando sus tres características principales: dirección, sentido y módulo. El vector producto vectorial **C**=**A**×**B** tiene las siguientes características:

- **Módulo**. El módulo del producto vectorial es C = ABsenθ, donde θ es el ángulo que forman los vectores $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{B}}$ entre sí.

- **Dirección**. El producto vectorial es perpendicular al plano formado por los vectores **A** y **B** (excepción: si ambos vectores son paralelos, no hay un plano único definido y el producto será igual al vector cero).

- **Sentido**. Existen varias reglas mnemotécnicas para recordarlo. La más usual es la llamada **regla del tornillo** (o del sacacorchos): el sentido del vector producto es el sentido de avance de un tornillo o sacacorchos que gire tendiendo a hacer coincidir, por el camino más corto, la dirección del primer vector con la dirección del segundo vector. También es muy conocida la **regla de la mano derecha**: si cerramos la mano de tal forma que la dirección de ésta vaya del vector $\overline{\mathbf{A}}$ al $\overline{\mathbf{B}}$, el dedo pulgar indica el sentido del vector producto vectorial.

Ejemplo: supongamos una pared con dos vectores, el $\overline{\mathbf{A}}$ en la dirección vertical, sentido hacia arriba, y el $\overline{\mathbf{B}}$ en la dirección horizontal, sentido hacia la izquierda. Para llevar el vector $\overline{\mathbf{A}}$ hacia el $\overline{\mathbf{B}}$ habría que girar en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Un tornillo girando en ese sentido se desatornillaría, esto es, saldría fuera de la pared; por tanto, el sentido del vector $\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}$ es hacia fuera de la pared. O bien ponga el lector la mano derecha abierta, de canto, sobre el vector $\overline{\mathbf{A}}$, y gírese la mano un ángulo menor de 180º hasta hacerla coincidir con la dirección del vector $\overline{\mathbf{B}}$. El pulgar indica el sentido del vector producto. En este ejemplo, para ir de la dirección vertical (hacia arriba) a la horizontal (hacia la izquierda), habría de ponerse la mano con el pulgar apuntando hacia fuera de la pared. Ninguna de estas reglas sirve si los dos vectores son paralelos, pero en ese caso senθ=0 y el producto vectorial es igual al vector nulo.

El producto vectorial cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad anticonmutativa: $\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{A}} = -\,\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}$
- Propiedad distributiva respecto a la suma vectorial: $\overline{\mathbf{A}}\times(\overline{\mathbf{B}}+\overline{\mathbf{C}}) = (\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}) + (\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{C}})$
- Propiedad asociativa respecto al producto por escalar: $p(\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}) = (p\overline{\mathbf{A}})\times\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}}\times(p\overline{\mathbf{B}})$
- No asociatividad. Salvo excepciones, se tiene: $\overline{\mathbf{A}}\times(\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{C}}) \neq (\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}})\times\overline{\mathbf{C}}$
- Relaciones útiles: $\overline{\mathbf{A}}\cdot(\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{C}}) = \overline{\mathbf{B}}\cdot(\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{A}}) = \overline{\mathbf{C}}\cdot(\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}})$

  $\overline{\mathbf{A}}\times(\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{C}}) = \overline{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}}) - \overline{\mathbf{C}}(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}})$

Hay que recordar que, al contrario que el escalar, el producto vectorial *no es conmutativo*. Esto es una fuente continua de errores en la práctica y ha de evitarse. El producto vectorial no tiene operación inversa: si $\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{C}}$, por lo general no existen solución única para $\overline{\mathbf{X}}$.

Los vectores unitarios **i**, **j**, **k** cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=\mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=\mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=\mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{k}} & \hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=\hat{\boldsymbol{j}} \\ \hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=-\hat{\boldsymbol{k}} & \hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{j}}=-\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{k}}=-\hat{\boldsymbol{j}} \end{array}$$

Nótese cómo los productos vectoriales son positivos cuando los vectores que intervienen en ellos siguen el orden cíclico **i-j-k-i-j-k**; en caso contrario, son negativos.

Con esas propiedades podemos expresar el producto vectorial de forma analítica en cartesianas:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\times\overline{\boldsymbol{B}}=(A_y B_z-A_z B_y)\hat{\boldsymbol{i}}+(A_z B_x-A_x B_a)\hat{\boldsymbol{j}}+(A_x B_y-A_y B_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$

De la definición C = ABsenθ puede deducirse que el módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo definido por los vectores $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{B}}$. Esto nos permite asociar un vector a una superficie, lo cual, aunque parezca rebuscado, es de gran utilidad en muchas aplicaciones. En general, podemos extender esta representación a cualquier superficie plana, puesto que podemos descomponerla en un número de paralelogramos, y representar cualquier superficie plana por un vector $\overline{\mathbf{S}}$ con las siguientes características:

- Dirección: perpendicular a la superficie plana

- Módulo: igual a su área superficial.

- Sentido: el del avance de un tornillo que girase en el sentido atribuido anteriormente al contorno de la superficie. Este sentido es, en la mayoría de los casos, arbitrario, y se puede escoger según sea más cómodo.

Si la superficie no es plana, podemos dividirla en un número muy grande de pequeñas superficies elementales que podamos considerar planas, y representables cada una de ellas por un vector $\overline{\mathbf{s}}_\mathbf{i}$; sumando los vectores que representan esas superficies elementales se obtendrá el vector $\overline{\mathbf{S}}$ que caracteriza la superficie completa.

3.4 – Producto de tres vectores

Se conoce como **producto mixto de tres vectores** $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ y $\overline{\mathbf{C}}$, en ese orden, al escalar que resulta de la operación $\overline{\mathbf{A}}\cdot(\overline{\mathbf{B}}\times\overline{\mathbf{C}})$. Se puede obtener en función de las coordenadas cartesianas según esta operación:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\cdot(\overline{\boldsymbol{B}}\times\overline{\boldsymbol{C}})=A_x(B_y C_z-B_z C_y)+A_y(B_x C_z-B_z C_x)+A_z(B_x C_y-B_y C_z)$$

Este producto representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ y $\overline{\mathbf{C}}$. Estas son algunas de sus propiedades:

- Propiedad distributiva (en permutación cíclica): $\overline{\boldsymbol{A}}\cdot(\overline{\boldsymbol{B}}\times\overline{\boldsymbol{C}})=\overline{\boldsymbol{B}}\cdot(\overline{\boldsymbol{C}}\times\overline{\boldsymbol{A}})=\overline{\boldsymbol{C}}\cdot(\overline{\boldsymbol{A}}\times\overline{\boldsymbol{B}})$
- Propiedad antidistributiva (en perturbación no cíclica): $\overline{\boldsymbol{A}}\cdot(\overline{\boldsymbol{B}}\times\overline{\boldsymbol{C}})=\overline{\boldsymbol{B}}\cdot(\overline{\boldsymbol{A}}\times\overline{\boldsymbol{C}})$
- Propiedad distributiva respecto al producto escalar: $\overline{\boldsymbol{A}}\cdot(\overline{\boldsymbol{B}}\times\overline{\boldsymbol{C}})=(\overline{\boldsymbol{A}}\times\overline{\boldsymbol{B}})\cdot\overline{\boldsymbol{C}}$

3.6 – Momento de un vector

Hemos establecido las reglas del álgebra vectorial para vectores libres, esto es, aquellos que no dependen de una recta determinada sino de una dirección. Así, para la suma de vectores, no había inconveniente en desplazar los vectores hasta que el origen de uno y el extremo de otro coincidiesen. Pero no es el caso de los vectores deslizantes, ya que sus propiedades dependen de la recta de acción en la que estén. Puesto que algunas magnitudes han de estar representadas necesariamente por vectores deslizantes, debemos establecer nuevas reglas para ellos. Esto nos lleva al concepto de momento de un vector.

Sea **F** un vector deslizante, P el punto de aplicación de dicho vector sobre su recta soporte, y sea O un punto cualquiera del espacio. Si llamamos **r**=OP al vector de posición de P respecto al punto O, se define el **momento del vector** $\overline{\mathbf{F}}$ **respecto al punto O** como:

$$\boldsymbol{M_O}=\overline{\boldsymbol{r}}\times\overline{\boldsymbol{F}}$$

Es importante señalar que el momento depende del punto O, origen de momentos. Si se escoge otro punto Q, los momentos $\mathbf{M_o}$ y $\mathbf{M_Q}$ no serán por lo general iguales (lo serán cuando el vector $\overline{\mathbf{OQ}}$ sea paralelo al vector $\overline{\mathbf{F}}$.

4 – PROPIEDADES DE UN ESPACIO VECTORIAL

El concepto de vector suele estar asociado a imágenes de flechas, y así suele representarse en Mecánica: velocidades, aceleraciones, fuerzas, momentos... todos son vectores y se dibujan como flechas. Lo cierto es que el concepto de vector es mucho más amplio.

De modo genérico, un vector es todo elemento perteneciente a un **espacio vectorial**. A pesar del nombre un "espacio" vectorial no tiene por qué guardar relación con el habitual espacio tridimensional. Un espacio vectorial es una estructura algebraica que cumple diversas propiedades.

Para definir un espacio vectorial necesitamos un grupo abeliano y un cuerpo. El **grupo abeliano** (*V*) es un conjunto de elementos ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$...) a los que denominaremos **vectores** y en el que se ha definido una operación que llamaremos "adición" (+) y que cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
- Propiedad asociativa: $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}\,) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$
- Elemento neutro $\overline{0}$: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a}$
- Elemento opuesto ($-\overline{a}$) $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$

El **cuerpo** (*F*), a su vez, es un conjunto de elementos (m, n, o, p...) que llamaremos **escalares** y que tiene definida una operación que llamaremos "multiplicación (*) y que cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad distributiva respecto a la suma de escalares: $(m + n) * \overline{a} = m*\overline{a} + n*\overline{a}$
- Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores: $m*(\overline{a} + \overline{b}) = m*\overline{a} + m*\overline{b}$
- Propiedad asociativa respecto a la multiplicación de escalares: $(m*n)*\overline{a} = m*(n*\overline{a})$
- Elemento unidad (1): $1*\overline{a} = \overline{a}$

Es importante tener en cuenta que las operaciones que hemos llamado "adición" y "multiplicación" no tienen por qué corresponder con la suma y el producto de números reales a que

estamos acostumbrados. En general, la adición será cualquier operación que cumpla las propiedades expresadas para el grupo abeliano, de tal forma que cualquier adición de vectores de dicho grupo también sea un elemento de dicho grupo; igualmente para la multiplicación en el caso del cuerpo.

Un espacio vectorial V se define sobre un cuerpo *F*. En general, un conjunto V que cumple las propiedades de un cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo o sobre un subconjunto vectorial. Por ejemplo:

- El conjunto de los números reales (*R*) es un espacio vectorial sobre *R*
- El conjunto de grupos de N números reales (R^N) es un subespacio vectorial sobre R^N y sobre R
- El conjunto de los números complejos (*C*) es un espacio vectorial sobre *R*
- El conjunto de polinomios reales es un espacio vectorial sobre R

Los vectores a que el lector está acostumbrados pueden representarse mediante tres de componentes, lo que los convierte en elementos de un espacio vectorial R^3 sobre *R*; pero en absoluto son los únicos tipos de espacios vectoriales utilizados en Física. Un ejemplo es el de la Mecánica Cuántica, que utiliza la llamada función de onda para determinar el comportamiento de una partícula. Dicha función de onda es matemáticamente un vector perteneciente al **espacio de Hilbert**, formado por las funciones de variable real cuadrado-integrables (es decir, funciones cuyo módulo cuadrado pueda integrarse para dar un valor no infinito).